Γ.Ν.ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (**MSC**)

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ: Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΦΥΕ10 (**Γενικά Μαθηματικά Ι**)

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ: 2012-2013

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Γραπτή εργασία 1 (Νοέμβριος 2012)

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(A) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (B) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{x-1}}$

Λύση

A) Θέλουμε να βρούμε για ποια x μπορεί να οριστεί η συνάρτηση g(x). Θα πρέπει:

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Επομένως, το **πεδίο ορισμού** είναι $\boldsymbol{x \in [-1, 1]}$

B) Για να ορίζεται η f(x) θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής **3 περιορισμοί**:

- $x - 1 \neq 0$,
- $\frac{5x - x^2}{x-1} > 0$, και
- $\ln \frac{5x - x^2}{x-1} \geq 0$.

Από τον πρώτο περιορισμό έχουμε

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Από το δεύτερο περιορισμό βρίσκουμε ότι:

$$\frac{5x - x^2}{x-1} > 0 \overset{x \neq 1}{\Longleftrightarrow} (5x - x^2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x(5-x)(x-1) > 0$$

Ελέγχουμε για ποιες τιμές το γινόμενο αυτών των παραγόντων είναι θετικό με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα (στα σημεία του πίνακα που υπάρχει μαύρη διπλή γραμμή σημαίνει ότι ο όρος μηδενίζεται):

x		**0**	**1**	**5**
x	- ‖	+	+	+
5-x	+	+	+ ‖	-
x-1	-	- ‖	+	+
Γινόμενο	+ ‖	- ‖	+ ‖	-

Επομένως, $x \in (-\infty, 0) \cup (1,5)$

Από τον τρίτο περιορισμό βρίσκουμε ότι:

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\ln\frac{5x-x^2}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \ln\frac{5x-x^2}{x-1}\geq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{5x-x^2}{x-1}\geq 1 \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} (x-1)(5x-x^2)\geq (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(5x-x^2)-(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)[(5x-x^2)-(x-1)]\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(5x-x^2-x+1)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(-x^2+4x+1)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x^2-4x-1)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-4x-1)(x-1)\leq 0$$

Ελέγχουμε για ποιες τιμές το γινόμενο αυτών των παραγόντων μηδενίζεται:

$\chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1$ που είναι αδύνατο

Το $x^2-4x-1=0$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, επομένως θα πρέπει να πρώτα υπολογίσουμε τη διακρίνουσα Δ.

$$\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=16+4=20>0$$

Επομένως, θα έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις, άνισες μεταξύ τους. Αυτές θα είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\varDelta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{20}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2}\\[2ex] \dfrac{4-2\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x_{1,2}=\begin{cases}2+\sqrt{5}\\ 2-\sqrt{5}\end{cases}$$

Ελέγχουμε για ποιες τιμές το γινόμενο $(x^2-4x-1)(x-1)$είναι αρνητικό ή ίσο με μηδέν με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα (στα σημεία του πίνακα που υπάρχει διπλή μαύρη γραμμή σημαίνει ότι ο όρος μηδενίζεται):

x		$\mathbf{2-\sqrt{5}}$		**1**		$\mathbf{2+\sqrt{5}}$	
x^2-4x-1	+	‖	-		-	‖	+
x-1	-		-	‖	+		+
Γινόμενο	-	‖	+	‖	-	‖	+

Επομένως θα είναι $x\in(-\infty,2-\sqrt{5}]\cup(1,2+\sqrt{5}]$

Θα πρέπει οι τρεις περιορισμοί να συναληθεύουν. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\boldsymbol{x}\in\left(-\infty,\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{5}}\right]\cup(\mathbf{1},\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{5}}]$$

που είναι και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - x - 2, \lambda \in \mathbb{R}$

Α. Να εξετασθεί για ποιές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = 0$:
1. Έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, **2.** Έχει δύο ρίζες ίσες, **3.** Δεν έχει ρίζες πραγματικές.
Β. Να γίνει γραφική παράσταση της $f(x)$, για κάθε μια από τις περιπτώσεις
λ = −1, λ = −1/ 8, λ = 0, λ=1

Λύση

Α) Η εξίσωση f(x) είναι δευτέρου βαθμού, επομένως για την επίλυσή της αρχικά θα υπολογίσουμε τη διακρίνουσα Δ.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-2) \Leftrightarrow \Delta = 1 + 8\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

1) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση θα έχει **δύο άνισες πραγματικές ρίζες** αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 8\lambda > 0 \Leftrightarrow 8\lambda > -1 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{8}$$

2) Η εξίσωση θα έχει **δύο ρίζες ίσες** αν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8\lambda = 0 \Leftrightarrow 8\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$$

3) 2) Η εξίσωση **δεν έχει ρίζες πραγματικές** αν

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 8\lambda < 0 \Leftrightarrow 8\lambda < -1 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{1}{8}$$

Β) Θέλουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \lambda x^2 - x - 2$, για διάφορες τιμές του λ.

Για **λ=-1** η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x) = -x^2 - x - 2$, μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$f(x) = -x^2 - x - 2 = -(x^2 + x + 2) = -\left(x^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{4}\right) = -\left[\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{7}{4}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μία παραβολή που θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- εφόσον το πρόσημο του x^2 είναι αρνητικό, η παραβολή θα «βλέπει» προς τα κάτω,
- εφόσον Δ=-7<0, η συνάρτηση δε θα έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή δε θα τέμνει σε κανένα σημείο τον χχ΄,

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

- εφόσον έχουμε την ποσότητα $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση θα είναι μετατοπισμένη σε σχέση με τη x^2 κατά ½ προς τα αριστερά,
- θα είναι μετατοπισμένη σε σχέση με τη $g(x)=x^2$ κατά 7/4 προς τα κάτω,
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=-½
- έχει κορυφή (μέγιστο) το σημείο Κ $\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$,
- θα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2},+\infty)$.

Για **λ=-1/8** η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x)=-\frac{1}{8}x^2-x-2$, μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$f(x)=-\frac{1}{8}x^2-x-2 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{8}(x+4)^2$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μία παραβολή που θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- εφόσον το πρόσημο του x^2 είναι αρνητικό, η παραβολή θα «βλέπει» προς τα κάτω,
- εφόσον Δ=0, η συνάρτηση θα έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή θα τέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα μόνο σημείο,
- εφόσον |λ|=1/8<1, το «άνοιγμα» της παραβολής θα είναι μεγαλύτερο,
- εφόσον έχουμε την ποσότητα $(x+4)^2$, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση θα είναι μετατοπισμένη σε σχέση με τη x^2 κατά 4 προς τα αριστερά,
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=-4,
- έχει κορυφή (μέγιστο) το σημείο Κ $(-4,0)$,
- θα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-4,+\infty)$.

Για **λ=0** η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x)=-x-2$, δηλαδή παύει να είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και γίνεται πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης δε θα είναι παραβολή, αλλά ευθεία γραμμή που θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- εφόσον το πρόσημο του x είναι αρνητικό, η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$,
- θα τέμνει τον άξονα των xx΄ στο σημείο (-2,0) και τον άξονα των yy΄ στο σημείο (0,-2),
- θα είναι παράλληλη της g(x)=-x, μετατοπισμένη κατά 2 προς τα κάτω.

Για **λ=1** η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x)=x^2-x-2$, μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$f(x)=x^2-x-2=x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=\Leftrightarrow$$

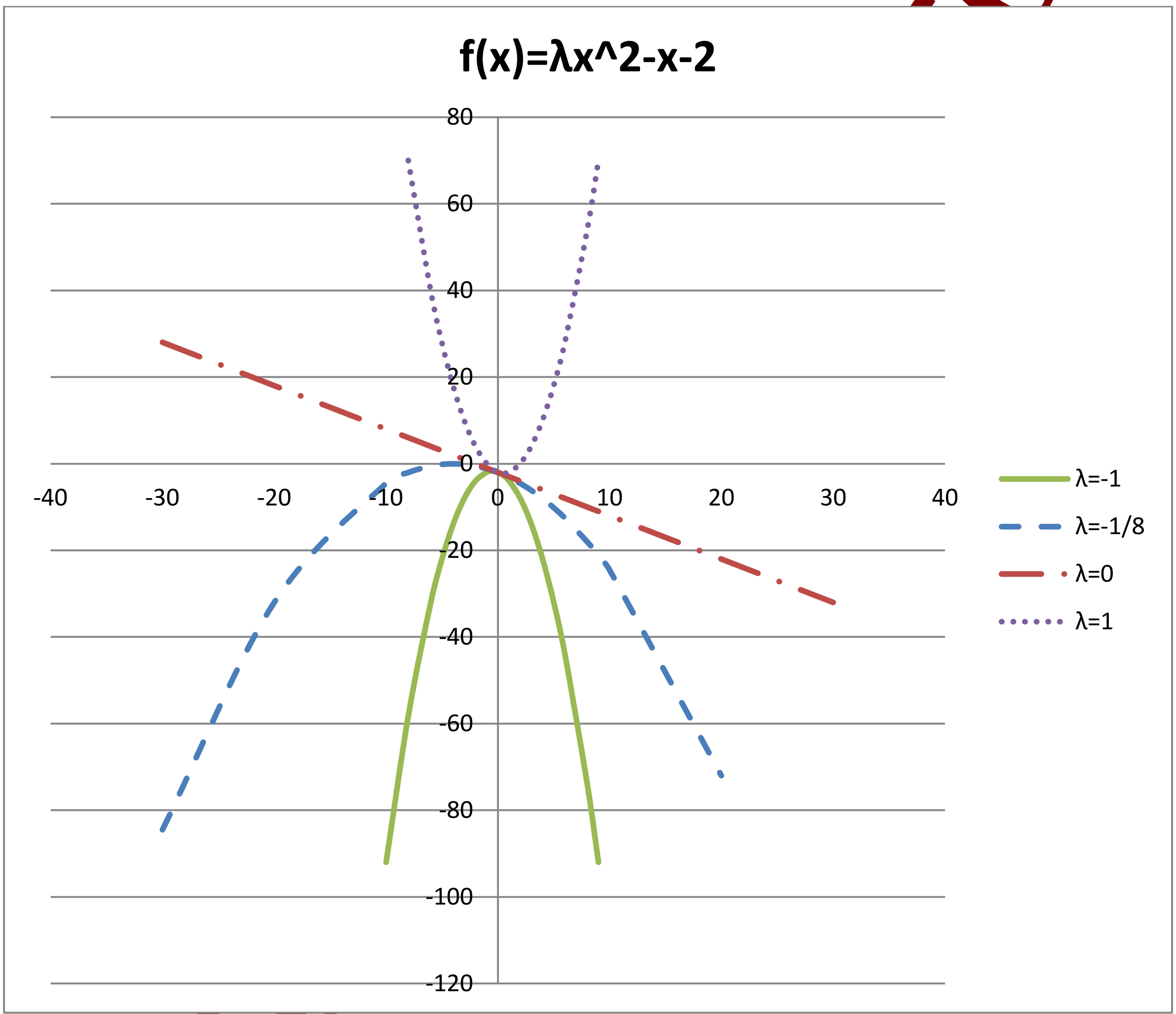
$$\Leftrightarrow f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

- εφόσον το πρόσημο του x^2 είναι θετικό, η παραβολή θα «βλέπει» προς τα πάνω,
- εφόσον Δ=9>0, η συνάρτηση θα έχει δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή θα τέμνει σε δύο σημεία τον xx΄,

idiaiteramathimata.gr

- εφόσον έχουμε την ποσότητα $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση θα είναι μετατοπισμένη σε σχέση με τη x^2 κατά ½ προς τα δεξιά,
- θα είναι μετατοπισμένη σε σχέση με τη $g(x) = x^2$ κατά 9/4 προς τα κάτω,
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=½
- έχει κορυφή (ελάχιστο) το σημείο Κ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$,
- θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Οι γραφικές παραστάσεις και των 4 συναρτήσεων φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Άσκηση 3

A) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

B) Να λυθεί στο διάστημα $[0,2\pi]$ η εξίσωση $\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0$

Λύση

A) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Έχουμε ότι $\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x =$

$= 2\sin x\cos x\cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x =$

$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x =$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

B) Έχουμε την εξίσωση $\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0$.

Γνωρίζουμε ότι $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής η εξίσωση γίνεται:

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

Θέτουμε $\cos x = y$, οπότε η τελευταία γίνεται

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

που είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, οπότε θα την επιλύσουμε με τη βοήθεια της διακρίνουσας Δ:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \Leftrightarrow \Delta = 9 + 16 \Leftrightarrow \Delta = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} \\ \frac{3-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow y_{1,2} = \begin{cases} \frac{8}{4} \\ \frac{-2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow y_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -{}^{1}/_{2} \end{cases} \xLeftrightarrow{y=\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -{}^{1}/_{2} \end{cases} \xLeftrightarrow{-1 \le \cos x \le 1} \cos x_{1,2} = \begin{cases} \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\nu \\ -{}^{1}/_{2} \end{cases}$$

Για την εξίσωση $\cos x = -\frac{1}{2}$ εργαζόμαστε ως εξής:

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \cos\tfrac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\pi-\tfrac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\tfrac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

Επομένως

$$\cos x=\cos\tfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\ x=\begin{cases}2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}\\ 2\kappa\pi-\dfrac{2\pi}{3}\end{cases},\acute{o}\pi o\upsilon\ \kappa\in\mathbb{Z}\ (1)$$

Επειδή το $x\in[0,2\pi]$, θα έχουμε:

$$0\leq x\leq 2\pi\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq 2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}\leq 2\pi\\ 0\leq 2\kappa\pi-\dfrac{2\pi}{3}\leq 2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{3}\leq 2\kappa\pi\leq 2\pi-\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{2\pi}{3}\leq 2\kappa\pi\leq 2\pi+\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{3}\leq 2\kappa\pi\leq\dfrac{4\pi}{3}\\ \dfrac{2\pi}{3}\leq 2\kappa\pi\leq\dfrac{8\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leq\kappa\leq\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{3}\leq\kappa\leq\dfrac{4}{3}\end{cases}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\kappa=0\\ \kappa=1\end{cases}(2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι:

$$x=\begin{cases}2\pi/3\\ 4\pi/3\end{cases}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 4

Να λύσετε την εξίσωση: $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2}$

Λύση

Έχουμε την εξίσωση:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} 1 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{3}{2} \xLeftrightarrow{2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x} \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}} \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \begin{cases} 2\kappa\pi + {}^{\pi}/_{6} \\ 2\kappa\pi + \left(\pi - {}^{\pi}/_{6}\right) \end{cases}, \acute{o}\pi o \upsilon\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \kappa\pi + \dfrac{\pi}{12} \\ \kappa\pi + \dfrac{5\pi}{12} \end{cases}, \acute{o}\pi o \upsilon\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 5

Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Α) Να βρεθούν οι πίνακες: ΑΒ, ΒΑ, AA^T, $(AB)^{-1}$

Β) Να εξετασθεί αν ο πίνακας ΒΑ έχει αντίστροφο.

Λύση

Α) Ο πίνακας Α είναι τύπου 2x3, ενώ ο πίνακας Β είναι τύπου 3x2, επομένως το γινόμενό ΑΒ θα δώσει πίνακα τύπου 2x2, ενώ το γινόμενο ΒΑ θα δώσει πίνακα τύπου 3x3.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 1 & 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Αν ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, τότε ο ανάστροφός του (A^T) θα είναι $\boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή είναι πίνακας τύπου 3x2, επομένως από το γινόμενο AA^T θα προκύψει πίνακας τύπου 2x2. Συγκεκριμένα θα είναι:

$$\boldsymbol{AA^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ΑΒ είναι ένας τετραγωνικός 2x2 πίνακας, επομένως ο αντίστροφός του $(AB)^{-1}$ θα υπάρχει αν η ορίζουσά |ΑΒ| θα είναι διάφορη του μηδενός:

$$|\boldsymbol{AB}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 3\cdot 5 = 18 - 15 = 3 \neq 0$$

Εφόσον |ΑΒ| ≠ 0, θα υπάρχει ο αντίστροφος του ΑΒ που θα υπολογίζεται ως εξής

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 6 & -\frac{1}{3}\cdot 3 \\ -\frac{1}{3}\cdot 5 & \frac{1}{3}\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

ιδιαιτερομαθηματα.gr

Β) Ο πίνακας ΒΑ είναι τετραγωνικός 3x3 πίνακας. Για να έχει αντίστροφο θα πρέπει η ορίζουσα |ΒΑ| να είναι διάφορη του μηδενός. Έχουμε λοιπόν:

$$|BA| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |BA| = 3(4 \cdot 2 - 4 \cdot 1) - 5(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + 2(3 \cdot 4 - 2 \cdot 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |BA| = 3 \cdot (8 - 4) - 5(6 - 2) + 2(12 - 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |BA| = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \Leftrightarrow |BA| = 12 - 20 + 8 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{|BA| = 0}$$

Εφόσον η ορίζουσα του πίνακα ΒΑ είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ο πίνακας $(BA)^{-1}$, δηλαδή **δεν υπάρχει ο αντίστροφος του ΒΑ**.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 6

A) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 2 και 3 και 4 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 4 & x-3 & 0 \\ 9 & 3 & x-4 \end{vmatrix} = 0.$

B) Αν για ένα τετραγωνικό πίνακα Α ισχύει $A^2 - A - I = 0$ να αποδειχθεί ότι έχει αντίστροφο και να εκφρασθεί ο A^{-1} συναρτήσει του Α και του μοναδιαίου Ι. Να εκφρασθεί και ο A^3 συναρτήσει του Α και του μοναδιαίου Ι.

Λύση

A) Έχουμε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 4 & x-3 & 0 \\ 9 & 3 & x-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 3 & x-4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 9 & x-4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & x-3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[(x-3)(x-4) - 0 \cdot 3] - 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ ή } x-3 = 0 \text{ ή } x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = 4$$

B) Έχουμε ότι

$$A^2 - A - I = 0 \Leftrightarrow A(A-I) = I$$

Εφόσον το γινόμενο Α(Α-Ι) μας δίνει το μοναδιαίο πίνακα, αυτό σημαίνει ότι οι δύο πίνακες είναι αντίστροφοι, δηλαδή:

$$A^{-1} = A - I$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον A^3

$$A^3 = A^2 A \xLeftrightarrow{A^2=A+I} A^3 = (A+I)A \Leftrightarrow A^3 = A^2 + A \xLeftrightarrow{A^2=A+I} A^3 = A + I + A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 2A + I$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 7

A) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού αν είναι γνωστό ότι έχουν άθροισμα 2 και άθροισμα τετραγώνων 10.

B) Να λυθεί η εξίσωση: $(x-\frac{1}{x})^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$ (κάντε την αντικατάσταση $\left(x+\frac{1}{x}\right)=\omega$)

Λύση

A) Εφόσον είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού, θα έχει δύο ρίζες, τις x και y. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο ριζών κάνει 2, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους 10. Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$\begin{Bmatrix} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=2-x \\ x^2+y^2=10 \end{Bmatrix}$$

Στη δεύτερη εξίσωση αντικαθιστώ το y με το 2-x που προκύπτει από την πρώτη εξίσωση:

$$x^2+(2-x)^2=10 \Leftrightarrow x^2+4+x^2-2\cdot 2x=10 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού, οπότε για την επίλυσή της θα χρησιμοποιήσουμε την διακρίνουσα Δ:

$$\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$$

άρα θα έχουμε δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\varDelta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{2+4}{2}\\[2mm] \dfrac{2-4}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{6}{2}\\[2mm] \dfrac{-2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x_{1,2}=\begin{cases}3\\ -1\end{cases}\overset{x=2-y}{\Longleftrightarrow} y_{1,2}=\begin{cases}-1\\ 3\end{cases}$$

Άρα θα έχουμε **δύο ζεύγη λύσεων**: (x,y) = (3,-1) ή(x,y) = (-1,3)

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Β) Έχουμε την εξίσωση:

$$(x-\frac{1}{x})^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$$

Θα πρέπει αρχικά να πάρουμε περιορισμούς. Συγκεκριμένα θα πρέπει το x≠0. Έχουμε λοιπόν:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\Leftrightarrow x^2-2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\xLeftrightarrow[\text{και στα 2 μέλη}]{\text{προσθέτουμε το 4}}x^2-2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=4+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=8\xLeftrightarrow{(x+1/x)^2=x^2+2+1/x^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$$

Θέτω $x+\frac{1}{x}=\omega$, επομένως η τελευταία εξίσωση θα γίνει:

$$\omega^2+2\omega-8=0$$

που είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού και για τη λύση της οποίας θα υπολογίσουμε αρχικά τη διακρίνουσα Δ:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36>0$$

Αφού Δ>0 θα έχουμε δύο ρίζες άνισες μεταξύ τους. Επομένως θα είναι:

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm6}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\omega_{1,2}=\begin{cases}\frac{-2+6}{2}\\ \frac{-2-6}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\omega_{1,2}=\begin{cases}\frac{4}{2}\\ \frac{-8}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\omega_{1,2}=\begin{cases}2\\ -4\end{cases}$$

Έχουμε όμως ότι $x+\frac{1}{x}=\omega$, επομένως:

$$\begin{cases}x+\frac{1}{x}=2\\ x+\frac{1}{x}=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=2x\\ x^2+1=-4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ x^2+4x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\ x^2+4x+1=0\end{cases}$$

ιδιαιτερα μαθηματα.gr

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Για τη δεύτερη εξίσωση υπολογίζουμε τη διακρίνουσα Δ:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 16+4 = 12 > 0$$

με τη βοήθεια της οποίας υπολογίζουμε τα:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Άρα $x=1$ ή $x=-2+\sqrt{3}$ ή $x=-2-\sqrt{3}$.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 8

Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss να βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις των συστημάτων:

Α) $\begin{matrix} 3x+2y+z=2 \\ 6x+4z+2z=4 \\ 12x+8y+4z=8 \end{matrix}$

Β) $\begin{matrix} x+2y+z-w=2 \\ 2x+5y+3z+w=5 \\ 3x+7y+5z-3w=3 \end{matrix}$

Λύση

Θέλουμε να επιλύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Θα πρέπει και στις 2 περιπτώσεις να δημιουργήσουμε τον επαυξημένο πίνακα, δηλαδή τον πίνακα των συντελεστών στον οποίο έχουμε προσθέσει τον πίνακα στήλη των σταθερών όρων.

Α) Πρόκειται για ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Το σύστημα γράφεται στη μορφή $A \cdot \mathrm{X} = b$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα για το σύστημα αυτό:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & |2 \\ 6 & 4 & 2 & |4 \\ 12 & 8 & 4 & |8 \end{bmatrix} \xLeftrightarrow[R_3 \to {}^1\!/_4 R_3]{R_2 \to {}^1\!/_2 R_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & |2 \\ 3 & 2 & 1 & |2 \\ 3 & 2 & 1 & |2 \end{bmatrix} \xLeftrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$$

Από τον τελευταίο πίνακα καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά έχουμε μία εξίσωση με 3 αγνώστους. Συγκεκριμένα:

$$3x + 2y + z = 2 \Leftrightarrow x = -\tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι θα έχουμε **διπαραμετρική απειρία λύσεων**:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y \\ z \end{bmatrix}, \acute{o}\pi o \upsilon\ x, y \in \mathbb{R}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Β) Πρόκειται για ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους. Το σύστημα γράφεται στη μορφή $A \cdot \mathrm{X} = b$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα για το σύστημα αυτό:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & -3 & 3 \end{array}\right] \xLeftrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right]$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι κλιμακωτός και, επομένως, το τελικό σύστημα που είναι ισοδύναμο του αρχικού, μπορούμε να το λύσουμε εύκολα. Θεωρώντας τη μεταβλητή w ως παράμετρο από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι:

$$z - 3w = -4 \Leftrightarrow z = 3w - 4$$

οπότε από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$y + z + 3w = 1 \xLeftrightarrow{z=3w-4} y + 3w - 4 + 3w = 1 \Leftrightarrow y = 5 - 6w$$

και από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε:

$$x + 2y + z - w = 2 \xLeftrightarrow[y=5-6w]{z=3w-4} x + 2(5 - 6w) + 3w - 4 - w = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 10 - 12w + 3w - 4 - w = 2 \Leftrightarrow x = -4 + 10w$$

Άρα το σύστημα έχει **μονοπαραμετρική απειρία λύσεων**, την:

$$X = \begin{bmatrix} -4 + 10w \\ 5 - 6w \\ 3w - 4 \\ w \end{bmatrix}, \text{όπου } w \in \mathbb{R}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 9

Δίνεται το σύστημα AX = b, όπου $A = \begin{bmatrix} 2\lambda & 8 & 11 \\ \lambda & 5 & 7 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\kappa\alpha\iota\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\kappa\alpha\iota\ \lambda \in$ $\mathbb{R}$ παράμετρος.

A) Χρησιμοποιείστε τα μέθοδο Cramer για να προσδιορίσετε τις τιμές του λ ∈ ℝ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση, και στη συνέχεια υπολογίστε τη.

B) Να εξεταστεί αν για λ =1 το σύστημα έχει λύση.

Λύση

A) Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε την ορίζουσα Δ του πίνακα Α:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\lambda & 8 & 11 \\ \lambda & 5 & 7 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} \lambda & 7 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} \lambda & 5 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2\lambda(5\lambda - 7\lambda) - 8(\lambda^2 - 7) + 11(\lambda^2 - 5) = -4\lambda^2 - 8\lambda^2 + 56 + 11\lambda^2 - 55 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = -\lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \Delta = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

Για να έχει το σύστημα **μοναδική λύση** θα πρέπει **Δ≠0**, δηλαδή:

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(1 + \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1\ \kappa\alpha\iota\ \lambda \neq -1$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα Δx, Δy και Δz, δηλαδή τις ορίζουσες που προκύπτουν από αντικατάσταση της πρώτης, δεύτερης και τρίτης στήλης αντίστοιχα του Α από τον πίνακα b. Έχουμε λοιπόν:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 6(5\lambda - 7\lambda) - 8(3\lambda - 14) + 11(3\lambda - 10) = -12\lambda - 24\lambda + 112 + 33\lambda - 110 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_x = -3\lambda + 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2\lambda & 6 & 11 \\ \lambda & 3 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} \lambda & 7 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\lambda(3\lambda - 14) - 6(\lambda^2 - 7) + 11(2\lambda - 3) = 6\lambda^2 - 28\lambda - 6\lambda^2 + 42 + 22\lambda - 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_y = -6\lambda + 9$$

ιδιαιτερομαθηματα.gr

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2\lambda & 8 & 6 \\ \lambda & 5 & 3 \\ 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} \lambda & 5 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2\lambda(10 - 3\lambda) - 8(2\lambda - 3) + 6(\lambda^2 - 5) = 20\lambda - 6\lambda^2 - 16\lambda + 24 + 6\lambda^2 - 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_z = 4\lambda - 6$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω και με την προϋπόθεση ότι Δ≠0, η μοναδική λύση για το σύστημα θα είναι:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \Leftrightarrow x = \frac{-3\lambda + 2}{(1-\lambda)(1+\lambda)}, όπου\ \lambda \in \mathbb{R}\ με\ \lambda \neq 1\ και\ \lambda \neq -1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \Leftrightarrow y = \frac{-6\lambda + 9}{(1-\lambda)(1+\lambda)}, όπου\ \lambda \in \mathbb{R}\ με\ \lambda \neq 1\ και\ \lambda \neq -1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \Leftrightarrow z = \frac{4\lambda - 6}{(1-\lambda)(1+\lambda)}, όπου\ \lambda \in \mathbb{R}\ με\ \lambda \neq 1\ και\ \lambda \neq -1$$

Άρα το σύστημα έχει **μονοπαραμετρική απειρία λύσεων**, την:

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{-3\lambda + 2}{(1-\lambda)(1+\lambda)} \\[2ex] \dfrac{-6\lambda + 9}{(1-\lambda)(1+\lambda)} \\[2ex] \dfrac{4\lambda - 6}{(1-\lambda)(1+\lambda)} \end{bmatrix}, όπου\ \lambda \in \mathbb{R}\ με\ \lambda \neq 1\ και\ \lambda \neq -1$$

Β) Αν **λ=1**, τότε οι ορίζουσες θα έχουν τις τιμές:

$$\Delta = (1-1)(1+1) = 0$$

$$\Delta_x = -3 \cdot 1 + 2 = -1 \neq 0$$

$$\Delta_y = -6 \cdot 1 + 9 = 3 \neq 0$$

$$\Delta_z = 4 \cdot 1 - 6 = -2 \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι **Δ=0**, αλλά **Δx, Δy, Δz ≠ 0**. Εφόσον η Δ είναι μηδέν και τουλάχιστον μία από τις ορίζουσες Δx, Δy, Δz είναι διάφορες του μηδενός, αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις είναι ασυμβίβαστες, δηλαδή το **σύστημα είναι αδύνατο** και δεν υπάρχει λύση.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 10

Δίνονται τα διανύσματα: a = i− j+k, b = −i−k, c = a+b.

A) Να υπολογίσετε τα: |a|, a·b, a×c, b·(a×c), |a|b− |b|a

B) Να επαληθευθεί για τα παραπάνω διανύσματα η ταυτότητα: a× (b×c)=(a·c)b−(a·b)c.

Λύση

A) Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο του διανύσματος |a|:

$$|\mathrm{a}|^2 = \mathrm{a}\cdot\mathrm{a} = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \Leftrightarrow |\mathrm{a}| = \sqrt{3}$$

Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{a}\cdot b$ θα εργαστούμε ως εξής:

$$\mathrm{a}\cdot b = (1,-1,1)\cdot(-1,0,-1) = 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 1\cdot(-1) = -1 + 0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a}\cdot b = -2$$

Για να υπολογίσουμε το εξωτερικό γινόμενο $a \times c$, θα πρέπει αρχικά να βρούμε το διάνυσμα c:

$$c = \mathrm{a} + b \Leftrightarrow c = i - j + k - i - k \Leftrightarrow c = -j$$

$$\mathrm{a}\times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} k = (0 -- 1)i - 0\cdot j + (-1)k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a}\times c = i - k$$

Για να υπολογίσουμε το |a|b− |b|a θα πρέπει αρχικά να βρούμε το |b|:

$$|b|^2 = b\cdot b = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \Leftrightarrow |b| = \sqrt{2}$$

Επομένως θα είναι:

$$|\mathrm{a}|\mathrm{b} - |\mathrm{b}|\mathrm{a} = \sqrt{3}b - \sqrt{2}\mathrm{a} = \sqrt{3}(-i-k) - \sqrt{2}(i - j + k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\mathrm{a}|\mathrm{b} - |\mathrm{b}|\mathrm{a} = -\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\mathrm{i} + \sqrt{2}\mathrm{j} - \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\mathrm{k}$$

B) Θέλουμε να επαληθεύσουμε την ταυτότητα a× (b×c)=(a·c)b−(a·b)c. Θα υπολογίσουμε αρχικά το εξωτερικό γινόμενο $b \times c$.

$$b\times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} k =$$

$$= -1\cdot i - 0\cdot j + 1\cdot k \Leftrightarrow b\times c = -i + k$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το εξωτερικό γινόμενο του a με το $(b \times c)$:

$$\mathrm{a} \times (b \times c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} k =$$

$$= -1 \cdot i - 2j - 1 \cdot k \Leftrightarrow \mathrm{a} \times (b \times c) = -i - 2j - k$$

Για να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{a} \cdot c$ θα εργαστούμε ως εξής:

$$\mathrm{a} \cdot c = (1, -1, 1) \cdot (0, -1, 0) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 + 1 + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a} \cdot c = 1$$

Από το ερώτημα (Α) έχουμε βρει ότι $\mathrm{a} \cdot b = -2$. Επομένως έχουμε:

$$(\mathrm{a} \cdot \mathrm{c})\mathrm{b} - (\mathrm{a} \cdot \mathrm{b})\mathrm{c} = 1 \cdot b \text{—} 2c = b + 2c = -i - k + 2(-j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{a} \cdot \mathrm{c})\mathrm{b} - (\mathrm{a} \cdot \mathrm{b})\mathrm{c} = -\mathrm{i} - 2\mathrm{j} - \mathrm{k}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων έχουμε ότι:

$\mathrm{a} \times (\mathrm{b} \times \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \cdot \mathrm{c})\mathrm{b} - (\mathrm{a} \cdot \mathrm{b})\mathrm{c} \xLeftrightarrow[(\mathrm{a}\cdot\mathrm{c})\mathrm{b}-(\mathrm{a}\cdot\mathrm{b})\mathrm{c}=-\mathrm{i}-2\mathrm{j}-\mathrm{k}]{\mathrm{a}\times(b\times c)=-i-2j-k} -i - 2j - k = -i - 2j - k$ που ισχύει

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Γραπτή εργασία 2 (Δεκέμβριος 2012)

Άσκηση 1

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

A) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C και να δείξετε ότι το $A(1,-4)$ είναι σημείο του κύκλου.

B) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο αντιδιαμετρικό σημείο A' του σημείου A.

Λύση

A) Έχουμε τον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για κύκλο με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\alpha = 2$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι το $A(1,-4)$ είναι σημείο του κύκλου. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Βάζουμε λοιπόν όπου $x = 1$ και $y = -4$.

$1^2 + (-4)^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 16 - 2 - 16 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.

B) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $B(x_1, y_1)$ ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα α δίνεται από την εξίσωση:

$$(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) + (y - y_0) \cdot (y_1 - y_0) = a^2$$

Παρατηρούμε ότι τόσο το κέντρο του κύκλου $K(1,-2)$, όσο και το σημείο A αυτού βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 1$. Το αντιδιαμετρικό του A, το A':

1. θα είναι πάνω στην ίδια ευθεία με τα K και A, και
2. θα ισαπέχει από το κέντρο K όσο και το σημείο A,

δηλαδή θα είναι $A'(1,0)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι ο κύκλος μας έχει ακτίνα $\alpha = 2$.

idiaiteramathimata.gr

Άρα η εφαπτομένη στο σημείο A' θα δίνεται από την εξίσωση:

$$(x-1)\cdot(1-1)+(y+2)\cdot(0+2)=2^2 \Leftrightarrow (x-1)\cdot 0+(y+2)\cdot 2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y+4=4 \Leftrightarrow 2y=0 \Leftrightarrow y=0$$

Πρόκειται, δηλαδή, για τον άξονα xx'.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 2

Α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία $E'(-1,2),\ E(5,2)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-3,2),\ A(7,2)$

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $M(\frac{5\sqrt{2}+4}{2}, 2+2\sqrt{2})$.

Λύση

Α) Παρατηρούμε ότι τόσο οι εστίες, όσο και οι κορυφές της έλλειψης βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=2$. Το κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο $O'(2,2)$ και ο μεγάλος άξονας βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=2$.

Γνωρίζουμε ότι οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-1,2),\ E(5,2)$ και οι κορυφές τα σημεία $A'(-3,2),\ A(7,2)$, επομένως:

$$(A'A)=2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 7--3 \Leftrightarrow 2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

$$(E'E)=2\gamma \Leftrightarrow 2\gamma = 5--1 \Leftrightarrow 2\gamma = 6 \Leftrightarrow \gamma = 3$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{5^2-3^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{25-9} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{16} \Leftrightarrow \beta = 4$$

Αν θεωρήσουμε νέο σύστημα συντεταγμένων $O'XY$ παράλληλο προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων Oxy με κέντρο το σημείο $O'(2,2)$ του Oxy, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις $X=x-2$ και $Y=y-2$. Στην περίπτωση αυτή η έλλειψή μας θα έχει τη μορφή:

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{4^2}=1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}=1 \xLeftrightarrow[Y=y-2]{X=x-2} \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται οι αντιστοιχίες στα διάφορα στοιχεία του αρχικού συστήματος συντεταγμένων Oxy και του νέου συστήματος συντεταγμένων $O'XY$.

	$\boldsymbol{O'XY}$	$\boldsymbol{Oxy}$
μεταβλητές	$X=x-2$, $Y=y-2$	$x=X+2$, $y=Y+2$
σημείο $\boldsymbol{O'}$	$(0,0)$	$(2,2)$
εξίσωση έλλειψης	$\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}=1$	$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$
εστία $\boldsymbol{E'(-\gamma,0)}$	$E'(-3,0)$	$E'(-1,2)$
εστία $\boldsymbol{E'(\gamma,0)}$	$E(3,0)$	$E(5,2)$
κορυφή $\boldsymbol{A'(-\alpha,0)}$	$A'(-5,0)$	$A'(-3,2)$
κορυφή $\boldsymbol{A(\alpha,0)}$	$A(5,0)$	$A(7,2)$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Β) Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $M(\frac{5\sqrt{2}+4}{2}, 2+2\sqrt{2})$. Το σημείο αυτό στο σύστημα $O'XY$ θα έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{5\sqrt{2}+4}{2}-2, 2+2\sqrt{2}-2\right) = M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$ της έλλειψης $\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}=1$ (σύστημα συντεταγμένων $O'XY$) θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{X\cdot X_M}{25}+\frac{Y\cdot Y_M}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{X\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}}{25}+\frac{Y\cdot 2\sqrt{2}}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}\cdot X}{25\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}\cdot Y}{8}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot X}{10}+\frac{\sqrt{2}\cdot Y}{8}=1 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2}\cdot X}{40}+\frac{5\sqrt{2}\cdot Y}{40}=1 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2}\cdot X+5\sqrt{2}\cdot Y}{40}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}\cdot X+5\sqrt{2}\cdot Y=40 \Leftrightarrow 5\sqrt{2}\cdot Y=-4\sqrt{2}\cdot X+40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{-4\sqrt{2}\cdot X+40}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow Y=\frac{-4\sqrt{2}\cdot X}{5\sqrt{2}}+\frac{40}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow Y=-\frac{4}{5}X+\frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y=-\frac{4}{5}X+\frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow Y=-\frac{4}{5}X+\frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow Y=-\frac{4}{5}X+4\sqrt{2}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σύστημα συντεταγμένων Oxy με τη βοήθεια των σχέσεων $X=x-2$ και $Y=y-2$. Έχουμε λοιπόν:

$$Y=-\frac{4}{5}X+4\sqrt{2} \xLeftrightarrow[Y=y-2]{X=x-2} y-2=-\frac{4}{5}(x-2)+4\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y-2=-\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}+4\sqrt{2} \Leftrightarrow y=-\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}+4\sqrt{2}+2 \Leftrightarrow\ y=-\frac{4}{5}x+\frac{18}{5}+4\sqrt{2}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 3

A) Να βρείτε τις εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες των παρακάτω καμπύλων με τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις και να αναγνωρίσετε το είδος της καμπύλης που παριστάνουν:

i) $x = 2 + 5\cos t\,, y = 3 + 5\sin t\,, t \in [0,2\pi)$, ii) $x = \cos 2t\,, y = 2\sin t\,, t \in \mathbb{R}$,

iii) $x = t - 1, y = \frac{2}{3}\sqrt{t^2 - 9} + 2, t \in \mathbb{R}(-3,3)$.

B) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει κέντρο $K(1,-2)$, κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $A'(1,-5)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $3x - 2y = 7$, $3x + 2y = -1$.

Λύση

A) Θέλουμε να βρούμε σε τι είδους καμπύλες αντιστοιχούν οι παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις:

(i) $x = 2 + 5\cos t\,, y = 3 + 5\sin t\,, t \in [0,2\pi)'$

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x = 2 + 5\cos t \\ y = 3 + 5\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 5\cos t \\ y - 3 = 5\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 25\cos^2 t \\ (y-3)^2 = 25\sin^2 t \end{cases}, t \in [0,2\pi)$$

τις οποίες αν προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25\cos^2 t + 25\sin^2 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) \xLeftrightarrow{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Πρόκειται δηλαδή για **κύκλο** με κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\alpha = 5$.

(ii) $x = \cos 2t\,, y = 2\sin t\,, t \in \mathbb{R}$

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2\sin t \end{cases} \xLeftrightarrow{\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t} \begin{cases} x = 1 - 2\sin^2 t \\ y^2 = 4\sin^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2\sin^2 t \\ y^2 = 4\sin^2 t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 1 = 2\sin^2 t \\ y^2 = 4\sin^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 4\sin^2 t \\ y^2 = 4\sin^2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y^2 = -2x + 2 \Leftrightarrow$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\Leftrightarrow y^2 = -2(x-1)$$

Αν θεωρήσουμε νέο σύστημα συντεταγμένων $O'XY$ παράλληλο προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το σημείο $O'(1,0)$ του Oxy, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις $X = x - 1$ και $Y = y$, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$Y^2 = -2X$$

που αποτελεί εξίσωση **παραβολής** με $p = -1$. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την εστία $E(\frac{p}{2},0)$ και τη διευθετούσα $X = -\frac{p}{2}$ του νέου συστήματος συντεταγμένων:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) = E\left(-\frac{1}{2},0\right) \text{ και } X = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow X = -\frac{-1}{2} \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$$

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται οι αντιστοιχίες στα διάφορα στοιχεία του αρχικού συστήματος συντεταγμένων Oxy και του νέου συστήματος συντεταγμένων $O'XY$.

(iii) $x = t - 1, y = \frac{2}{3}\sqrt{t^2-9} + 2, t \in \mathbb{R}(-3,3)$

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = \dfrac{2}{3}\sqrt{t^2-9} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 2 = \dfrac{2}{3}\sqrt{t^2-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = t^2 \\ (y-2)^2 = \dfrac{4}{9}(t^2-9) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = t^2 \\ 9(y-2)^2 = 4(t^2-9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = t^2 \\ 9(y-2)^2 = 4t^2 - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = t^2 \\ 9(y-2)^2 + 36 = 4t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = t^2 \\ \dfrac{9}{4}(y-2)^2 + 9 = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}(-3,3) \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{9}{4}(y-2)^2 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - \frac{9}{4}(y-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Αν θεωρήσουμε νέο σύστημα συντεταγμένων $O'XY$ παράλληλο προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το σημείο $O'(1,2)$ του Oxy, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις $X = x - 1$ και $Y = y - 2$, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

που αποτελεί εξίσωση **υπερβολής** με

$$\alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 9 + 4 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{13}$$

Οι εστίες E_1 και E_2, καθώς και οι κορυφές A και A' της υπερβολής θα βρίσκονται πάνω στον άξονα των XX' και συγκεκριμένα θα είναι:

$$E_1(-\gamma, 0) = E_1(-\sqrt{13}, 0)$$

$$E_2(\gamma, 2) = E_2(\sqrt{13}, 0)$$

$$A'(-\alpha, 0) = A'(-3,0)$$

$$A(\alpha, 2) = A(3,0)$$

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται οι αντιστοιχίες στα διάφορα στοιχεία του αρχικού συστήματος συντεταγμένων Oxy και του νέου συστήματος συντεταγμένων $O'XY$.

	$O'XY$	Oxy
μεταβλητές	$X = x - 1$, $Y = y - 2$	$x = X + 1$, $y = Y + 2$
σημείο O'	$(0,0)$	$(1,2)$
εξίσωση υπερβολής	$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
εστία $E_1(-\gamma, 0)$	$E_1(-\sqrt{13}, 0)$	$E_1(-\sqrt{13} + 1,2)$
εστία $E_2(\gamma, 0)$	$E_2(\sqrt{13}, 0)$	$E_2(\sqrt{13} + 1,2)$
κορυφή $A'(-\alpha, 0)$	$A'(-3,0)$	$A'(-2,2)$
κορυφή $A(\alpha, 0)$	$A(3,0)$	$A(4,2)$

Β) Παρατηρούμε ότι το κέντρο $K(1,-2)$ της υπερβολής, καθώς και οι κορυφές $A(1,1)$, $A'(1,-5)$, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 1$, δηλαδή σε ευθεία παράλληλη προς τον yy'.

Θεωρούμε νέο σύστημα συντεταγμένων KXY παράλληλο προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το σημείο $K(1,-2)$ του Oxy, οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις $X = x - 1$ και $Y = y + 2$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της υπερβολής είναι:

$$\frac{Y^2}{\alpha^2} - \frac{X^2}{\beta^2} = 1$$

Το α μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα από την απόσταση των δύο κορυφών. Συγκεκριμένα είναι:

$$(A'A) = 2\alpha \Leftrightarrow 1 - (-5) = 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Θα υπολογίσουμε το β με τη βοήθεια των ασύμπτωτων ευθειών που θα πρέπει να έχουν τη μορφή $Y = -\frac{\alpha}{\beta}X$ και $Y = \frac{\alpha}{\beta}X$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \xLeftrightarrow[y=Y-2]{x=X+1} \begin{cases} 3(X+1) - 2(Y-2) = 7 \\ 3(X+1) + 2(Y-2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + 3 - 2Y + 4 = 7 \\ 3X + 3 + 2Y - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y + 7 = 7 \\ 3X + 2Y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = 0 \\ 3X + 2Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y = -3X \\ 2Y = 3X \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = -\dfrac{3}{2}X \\ Y = \dfrac{3}{2}X \end{cases} \xLeftrightarrow[Y=\frac{\alpha}{\beta}X]{Y=-\frac{\alpha}{\beta}X} \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω η εξίσωση της υπερβολής γίνεται:

$$\frac{Y^2}{3^2} - \frac{X^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1 \xLeftrightarrow[Y=y+2]{X=x-1} \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται οι αντιστοιχίες στα διάφορα στοιχεία του αρχικού συστήματος συντεταγμένων Oxy και του νέου συστήματος συντεταγμένων $O'XY$.

	$\boldsymbol{KXY}$	$\boldsymbol{Oxy}$
μεταβλητές	$X = x - 1$, $Y = y + 2$	$x = X + 1$, $y = Y - 2$
σημείο K	$(0,0)$	$(1,-2)$
εξίσωση υπερβολής	$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1$	$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$
κορυφή $A'(-\alpha, 0)$	$A'(0,-3)$	$A'(1,-5)$
κορυφή $A(\alpha, 0)$	$A(0,3)$	$A(1,1)$
ασύμπτωτη 1	$Y = -\frac{3}{2}X$	$3x - 2y = 7$
ασύμπτωτη 2	$Y = \frac{3}{2}X$	$3x + 2y = -1$

ιδιαιτερα-μαθηματα.gr

Άσκηση 4

Α) Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $(z-1)^\nu = z^\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι είναι $\text{Re}z = \frac{1}{2}$

Β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς w, z τέτοιους ώστε $w = \frac{2i-z}{z}$ $με\ z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

Λύση

Α) Ο μιγαδικός αριθμός z θα είναι της μορφής: $z = x + y \cdot i$, με το x να είναι το πραγματικό του μέρος και $y \cdot i$ το φανταστικό.

Έχουμε ότι $(z-1)^\nu = z^\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$. Η τελευταία σχέση μπορεί να γίνει:

$$(z-1)^\nu = z^\nu \Leftrightarrow |(z-1)^\nu| = |z^\nu| \Leftrightarrow |z-1|^\nu = |z|^\nu \Leftrightarrow |z-1| = |z| \overset{z=x+y\cdot i}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow |x + y \cdot i - 1| = |x + y \cdot i| \Leftrightarrow |(x-1) + y \cdot i| = |x + y \cdot i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \overset{\text{Re}z=x}{\Longleftrightarrow} \text{Re}z = \frac{1}{2}$$

Β) Έστω ότι ο w είναι πραγματικός, δηλαδή θα είναι της μορφής

$$w = a + 0 \cdot i \Leftrightarrow w = a$$

Έστω z μιγαδικός αριθμός της μορφής $z = x + y \cdot i$ με $z \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$w = \frac{2i - z}{z} \overset{w=a,\ z=x+y\cdot i}{\Longleftrightarrow} a = \frac{2i - (x + y \cdot i)}{x + y \cdot i} \Leftrightarrow a(x + y \cdot i) = -x + (2-y) \cdot i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + ay \cdot i = -x + (2-y) \cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} ax = -x \\ ay = 2 - y \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε την πρώτη εξίσωση που αφορά στο πραγματικό μέρος των αριθμών. Έχουμε, λοιπόν:

$$ax = -x \Leftrightarrow ax + x = 0 \Leftrightarrow x(a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ \alpha + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

- Αν $x = 0$, τότε ο μιγαδικός z θα είναι:

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$z = x + y \cdot i \overset{x=0}{\Longleftrightarrow} z = 0 + y \cdot i \Leftrightarrow z = y \cdot i$$

δηλαδή $\mathrm{Re}z = 0$, άρα ο z είναι φανταστικός αριθμός.

- Αν $\alpha = -1$, τότε από τη σχέση έχουμε:

$$w = \frac{2i - z}{z} \overset{w=a=-1}{\Longleftrightarrow} -1 = \frac{2i - z}{z} \Leftrightarrow -z = 2i - z \Leftrightarrow 0 = 2i \ \acute{\alpha}\tau o\pi o$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 5

Να λύσετε την εξίσωση $(\mathrm{z}+\mathrm{i})^3=27\mathrm{i}$. Αν $\mathrm{z}_0, \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης να δείξετε ότι οι εικόνες τους $\mathrm{M}_0(\mathrm{z}_0), \mathrm{M}_1(\mathrm{z}_1), \mathrm{M}_2(\mathrm{z}_2)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Λύση

Θέτουμε $w=z+i$. Έχουμε λοιπόν:

$$(\mathrm{z}+\mathrm{i})^3=27\mathrm{i} \Leftrightarrow w^3=27\mathrm{i} \Leftrightarrow w^3=27(0+1\cdot\mathrm{i}) \overset{\substack{\cos\pi/2=0 \\ \sin\pi/2=1}}{\Longleftrightarrow} w^3=27\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{i}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_\kappa=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+\sin\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\cdot\mathrm{i}\right), \kappa=0,1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_\kappa=3\left(\cos\frac{\frac{4\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{3}+\sin\frac{\frac{4\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{3}\cdot\mathrm{i}\right), \kappa=0,1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_\kappa=3\left(\cos\frac{4\kappa\pi+\pi}{6}+\sin\frac{4\kappa\pi+\pi}{6}\cdot\mathrm{i}\right), \kappa=0,1,2 \overset{w=z+i}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow z_\kappa+i=3\left(\cos\frac{4\kappa\pi+\pi}{6}+\sin\frac{4\kappa\pi+\pi}{6}\cdot\mathrm{i}\right), \kappa=0,1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_\kappa=3\cos\frac{4\kappa\pi+\pi}{6}+\left(3\sin\frac{4\kappa\pi+\pi}{6}-1\right)i, \kappa=0,1,2$$

Για $\kappa=0$, έχουμε:

$$z_0=3\cos\frac{4\cdot0\cdot\pi+\pi}{6}+\left(3\sin\frac{4\cdot0\cdot\pi+\pi}{6}-1\right)i \Leftrightarrow z_0=3\cos\frac{\pi}{6}+\left(3\sin\frac{\pi}{6}-1\right)i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_0=3\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(3\frac{1}{2}-1\right)i \Leftrightarrow z_0=3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

Για $\kappa=1$, έχουμε:

$$z_1=3\cos\frac{4\cdot1\cdot\pi+\pi}{6}+\left(3\sin\frac{4\cdot1\cdot\pi+\pi}{6}-1\right)i \Leftrightarrow z_1=3\cos\frac{5\pi}{6}+\left(3\sin\frac{5\pi}{6}-1\right)i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1=3\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})+[3\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)-1]i \overset{\substack{\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta \\ \cos(2\pi+\theta)=\cos\theta}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow z_1=3\cos(-\frac{\pi}{6})+[3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-1]i \overset{\substack{\sin(-x)=-\sin x \\ \cos(-x)=\cos x}}{\Longleftrightarrow}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\Leftrightarrow z_1 = 3\cos\frac{\pi}{6} + \left[-3\sin\frac{\pi}{6} - 1\right]i \Leftrightarrow z_1 = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(3\frac{1}{2} - 1\right)i \Leftrightarrow z_1 = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Για $\kappa = 2$, έχουμε:

$$z_2 = 3\cos\frac{4\cdot 2\cdot \pi + \pi}{6} + \left(3\sin\frac{4\cdot 2\cdot \pi + \pi}{6} - 1\right)i \Leftrightarrow z_2 = 3\cos\frac{9\pi}{6} + \left(3\sin\frac{9\pi}{6} - 1\right)i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3\cos(3\pi) + [3\sin(3\pi) - 1]i \Leftrightarrow$$

$$z_2 = 3\cos(2\pi + \pi) + [3\sin(2\pi + \pi) - 1]i \xLeftrightarrow[\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta]{\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3\cos\pi + [3\sin\pi - 1]i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3\cdot(-1) + [3\cdot 0 - 1]i \Leftrightarrow z_2 = -3 + (-1)i \Leftrightarrow z_2 = -3 - i$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και κατόπιν:

i. Να δειχθεί ότι είναι «1-1».
ii. Να βρεθεί το σύνολο εικόνων (τιμών) της.
iii. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

Λύση

Έχουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

και θέλουμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της. Θα πρέπει να πάρουμε τον εξής περιορισμό:

$$e^x + e^{-x} \neq 0 \overset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} e^x + \frac{1}{e^x} \neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 \neq -1$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $(e^x)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

(i) Θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι «1-1». Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ισχύει: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1} - \frac{1}{e^{x_1}}}{e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}}} = \frac{e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}}}{e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{(e^{x_1})^2 - 1}{e^{x_1}}}{\frac{(e^{x_1})^2 + 1}{e^{x_1}}} = \frac{\frac{(e^{x_2})^2 - 1}{e^{x_2}}}{\frac{(e^{x_2})^2 + 1}{e^{x_2}}} \Leftrightarrow \frac{(e^{x_1})^2 - 1}{(e^{x_1})^2 + 1} = \frac{(e^{x_2})^2 - 1}{(e^{x_2})^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(e^{x_1})^2 - 1] \cdot [(e^{x_2})^2 + 1] = [(e^{x_1})^2 + 1] \cdot [(e^{x_2})^2 - 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{x_1})^2 \cdot (e^{x_2})^2 + (e^{x_1})^2 - (e^{x_2})^2 - 1 = (e^{x_1})^2 \cdot (e^{x_2})^2 - (e^{x_1})^2 + (e^{x_2})^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{x_1})^2 - (e^{x_2})^2 = -(e^{x_1})^2 + (e^{x_2})^2 \Leftrightarrow 2(e^{x_1})^2 = 2(e^{x_2})^2 \Leftrightarrow (e^{x_1})^2 = (e^{x_2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

επομένως η συνάρτηση $f(x)$ είναι «1-1».

idiaiteramathimata.gr

(ii) Θέλουμε να βρούμε το σύνολο τιμών της $f(x)$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, καθώς ο παρονομαστής δε μηδενίζεται. Θέτουμε $y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ και θα λύσουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \cdot (e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \cdot e^x + y \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^x - y \cdot e^x = e^{-x} + y \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x(1-y) = e^{-x}(1+y)$$

- Αν $1 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1$, τότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$e^x \cdot 0 = e^{-x}(1+y) \Leftrightarrow e^{-x}(1+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0 \\ \text{ή} \\ 1 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = +\infty \\ \text{ή} \\ y = -1 \; \acute{\alpha}\tau o\pi o \end{cases}$$

- Αν $1 - y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$, τότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\frac{e^x}{e^{-x}} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow e^{x+x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

Εφόσον $e^{2x} > 0$, σημαίνει ότι και

$$\frac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow (1+y)(1-y) > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$$

Έχουμε λοιπόν:

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow 2\ln e^x = \ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow 2x = \ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

Θα πρέπει, επίσης,

$$\ln\frac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1+y}{1-y} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y} > 1 \Leftrightarrow (1+y)(1-y) > (1-y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - y^2 > 1 - 2y + y^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y < 0 \Leftrightarrow 2y(y-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 0$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $[-1,0)$.

(iii) Θέλουμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Θα εργαστούμε ως εξής:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \cdot (e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \cdot e^x + y \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^x - y \cdot e^x = e^{-x} + y \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x(1-y) = e^{-x}(1+y) \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow e^{x+x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \xLeftrightarrow{\frac{1+y}{1-y}>0}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow 2\ln e^{x} = \ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow 2x = \ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

οπότε η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι η

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 7

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1$ και $g(x) = \frac{x}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος των συναρτήσεων $f \circ g$ και $f \circ (g \circ f)$.

Λύση

Έχουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ με $x \neq 1$ και $g(x) = \frac{x}{3x-1}$ με $x \neq \frac{1}{3}$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να βρούμε το πεδίο ορισμού της. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ g(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ \frac{x}{3x-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq 3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

δηλαδή, $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

Επομένως, ορίζεται η $f \circ g$ και είναι:

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = \frac{2\frac{x}{3x-1}}{\frac{x}{3x-1} - 1} = \frac{\frac{2x}{3x-1}}{\frac{x}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x-1}} = \frac{\frac{2x}{3x-1}}{\frac{x-3x+1}{3x-1}} = \frac{\frac{2x}{3x-1}}{\frac{-2x+1}{3x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \circ g = \frac{2x}{-2x+1}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $f \circ (g \circ f)$ και να βρούμε το πεδίο ορισμού της. Αρχικά θα πρέπει να βρούμε τη $g \circ f$. Για να ορίζεται η τελευταία θα πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{2x}{x-1} \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 6x \neq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 5x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\frac{1}{5} \end{cases}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

δηλαδή, $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{5},1\}$. Επομένως, ορίζεται η $g\circ f$ και είναι

$$g\circ f=g\big(f(x)\big)=\frac{\frac{2x}{x-1}}{3\frac{2x}{x-1}-1}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{6x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{6x-x+1}{x-1}}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{5x+1}{x-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g\circ f=\frac{2x}{5x+1}$$

Αφού υπολογίσαμε τη $g\circ f$, τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε και τη $f\circ(g\circ f)$. Για να ορίζεται η τελευταία θα πρέπει:

$$\begin{cases}x\in D_{g\circ f}\\ g\circ f\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1, x\neq-\frac{1}{5}\\ g\circ f\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1, x\neq-\frac{1}{5}\\ \frac{2x}{5x+1}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1, x\neq-\frac{1}{5}\\ 2x\neq 5x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1, x\neq-\frac{1}{5}\\ 3x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1, x\neq-\frac{1}{5}\\ x\neq -\frac{1}{3}\end{cases}$$

δηλαδή, $D_{f\circ(g\circ f)}=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{5},1\}$. Επομένως, ορίζεται η $f\circ(g\circ f)$ και είναι

$$f\circ(g\circ f)=\frac{2\frac{2x}{5x+1}}{\frac{2x}{5x+1}-1}=\frac{\frac{4x}{5x+1}}{\frac{2x}{5x+1}-\frac{5x+1}{5x+1}}=\frac{\frac{4x}{5x+1}}{\frac{2x-5x-1}{5x+1}}=\frac{\frac{4x}{5x+1}}{\frac{-3x-1}{5x+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\circ(g\circ f)=\frac{4x}{-3x-1}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 8

A) Να υπολογίσετε το όριο κάθε μιας από τις παρακάτω ακολουθίες:

i) $a_\nu = \frac{2\sin^4 \nu}{\nu+1}$, ii) $b_\nu = (1-\frac{1}{\nu^2})^\nu$, iii) $c_\nu = \frac{\nu^3+4\nu^2-2\nu-7}{\nu^2+1}$.

B) Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_{\nu+1} = \sqrt{2+a_\nu},\ \nu \in \mathbb{N}$ με $a_1 = \sqrt{2}$ είναι:

i) Άνω φραγμένη από το 2. ii) Αύξουσα. iii) $\lim a_\nu = 2$

Λύση

A) Θέλουμε να υπολογίσουμε τα όρια από τις παρακάτω ακολουθίες:

(i) Έχουμε την ακολουθία $a_\nu = \frac{2\sin^4 \nu}{\nu+1}$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $-1 \leq \sin\nu \leq 1$, επομένως το $sin^4\,\nu$ θα παίρνει πάντα θετικές τιμές με μέγιστη τιμή το 1. Έχουμε λοιπόν:

$$-1 \leq \sin\nu \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq 2\,sin^4\,\nu \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\sin^4 \nu}{\nu+1} \leq \frac{2}{\nu+1}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty} 0 = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{2}{\nu+1} = 0$$

Άρα και για την ακολουθία α_ν που παίρνει τιμές ανάμεσα στο 0 και στο $\frac{2}{\nu+1}$ θα ισχύει:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{2\sin^4 \nu}{\nu+1} = 0$$

(ii) Έχουμε την ακολουθία $b_\nu = \left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^\nu$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το όριό της. Έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{\nu\to+\infty} b_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right]^\nu =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu \lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu \cdot e =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} \cdot e = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{\nu+1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} \cdot e =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1} \cdot e = \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu+1}} \cdot e = \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu+1}} \cdot e =$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to+\infty}[\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\frac{\nu+1}{\nu}]}\cdot e = \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}\cdot e = \frac{1}{e\cdot(1+0)}\cdot e = 1$$

(iii) Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της $c_\nu = \frac{\nu^3+4\nu^2-2\nu-7}{\nu^2+1}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{\nu\to+\infty} c_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^3+4\nu^2-2\nu-7}{\nu^2+1} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^3\left(1+4\frac{1}{\nu}-2\frac{1}{\nu^2}-\frac{7}{\nu^3}\right)}{\nu^2\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)} =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^3\left(1+4\frac{1}{\nu}-2\frac{1}{\nu^2}-\frac{7}{\nu^3}\right)}{\nu^2\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu\left(1+4\frac{1}{\nu}-2\frac{1}{\nu^2}-\frac{7}{\nu^3}\right)}{1+\frac{1}{\nu^2}} =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\nu\cdot\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1+4\frac{1}{\nu}-2\frac{1}{\nu^2}-\frac{7}{\nu^3}}{1+\frac{1}{\nu^2}} = \lim_{\nu\to+\infty}\nu\cdot\frac{1+0-0-0}{1+0} = \lim_{\nu\to+\infty}\nu = +\infty$$

Β) Έχουμε την ακολουθία $a_{\nu+1} = \sqrt{2+a_\nu},\ \nu\in\mathbb{N}$ με $a_1 = \sqrt{2}$.

(i) Θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το 2. Έστω $\alpha_\nu < \sigma$. Επειδή το σ είναι το άνω φράγμα, θα πρέπει και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+a_\nu} < \sigma$.

Εφόσον $\sqrt{2+a_\nu} < \sqrt{2+\sigma}$ αρκεί να έχουμε:

$$\sqrt{2+\sigma} \le \sigma \Leftrightarrow 2+\sigma \le \sigma^2 \Leftrightarrow \sigma^2-\sigma-2 \ge 0 \Leftrightarrow (\sigma-2)(\sigma+1) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le \sigma \le 2$$

Θέτουμε λοιπόν $\sigma = 2$ και παρατηρούμε ότι $a_1 = \sqrt{2} < 2 = \sigma$.

Αν $\alpha_\nu < 2$, τότε $a_{\nu+1} = \sqrt{2+a_\nu} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$.

Επομένως, $\alpha_\nu < 2$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

(ii) Παρατηρούμε ότι:

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 > \sqrt{2} = a_1$$

Έστω ότι ισχύει $a_{\nu+1} > a_\nu$. Έχουμε λοιπόν:

$$a_{\nu+1} > a_\nu \Leftrightarrow 2+a_{\nu+1} > 2+a_\nu \Leftrightarrow \sqrt{2+a_{\nu+1}} > \sqrt{2+a_\nu} \Leftrightarrow a_{\nu+2} > a_{\nu+1}$$

Από την τελευταία ανίσωση συμπεραίνουμε ότι $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, επομένως η ακολουθία είναι αύξουσα.

(iii) Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim a_\nu$. Έστω ότι ισχύει:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = x.$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Γνωρίζουμε ότι θα ισχύει επίσης:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_{\nu+1} = x \Leftrightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \sqrt{2+\alpha_\nu} = x \xLeftrightarrow{\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = x} \sqrt{2+x} = x \Leftrightarrow 2 + x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

Η ρίζα $x = -1$ απορρίπτεται, καθώς η ακολουθία α_ν είναι αύξουσα και έχει πρώτο όρο το $\alpha_1 = \sqrt{2}$. Επομένως ισχύει:

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = 2$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 9

Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$i)\ \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu^2+1}{2\nu^2+\nu-1},\ ii)\ \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu},\ iii)\ \sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu^2},\ iv)\ \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu(2\nu+1)2^{2\nu+1}}$$

Λύση

Θέλουμε να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.

(i) Έχουμε τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu^2+1}{2\nu^2+\nu-1}$. Θα υπολογίσουμε το όριο της ακολουθίας:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^2+1}{2\nu^2+\nu-1}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^2\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)}{2\nu^2\left(1+\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu^2}\right)}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\nu^2}}{2\left(1+\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu^2}\right)}=$$

$$=\frac{1+0}{2(1+0+0)}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Παρατηρούμε ότι το όριο της ακολουθίας είναι διαφορετικό του μηδενός. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία παρατήρηση ως «αρνητικό κριτήριο σύγκλισης», δηλαδή εφόσον $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^2+1}{2\nu^2+\nu-1}\neq 0$, η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu^2+1}{2\nu^2+\nu-1}$ **δεν συγκλίνει**.

(ii) Έχουμε την ακολουθία $\alpha_\nu=\frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu}$ και θέλουμε να δούμε αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu}$. συγκλίνει ή αποκλίνει Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου (D'Alembert). Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{\frac{\nu+1}{(\nu+2)2^{\nu+1}}}{\frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu}}=\frac{(\nu+1)(\nu+1)2^\nu}{\nu(\nu+2)2^{\nu+1}}=\frac{(\nu+1)(\nu+1)2^\nu}{\nu(\nu+2)2^\nu 2}=\frac{\nu^2+2\nu+1}{2\nu^2+4\nu}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^2+2\nu+1}{2\nu^2+4\nu}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu^2\left(1+\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)}{2\nu^2\left(1+\frac{2}{\nu}\right)}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{\nu^2}}{2\left(1+\frac{2}{\nu}\right)}=\frac{1+0+0}{2(1+0)}=\frac{1}{2}<1$$

Παρατηρούμε ότι το όριο $\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{1}{2}<1$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu}$ θα **συγκλίνει**.

(iii) Έχουμε τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu^2}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ρίζας (Cauchy) για να δούμε αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Έχουμε λοιπόν:

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\sqrt[\nu]{\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu^2}} = \sqrt[\nu]{\left[\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu}\right]^{\nu}} = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu} = \frac{1}{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu}} = \frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}} = \frac{1}{\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}} = \frac{1}{e} < 1$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι μικρότερο της μονάδας, επομένως η σειρά θα **συγκλίνει**.

(iv) Έχουμε τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\nu(2\nu+1)2^{2\nu+1}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου για να δούμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots[2(\nu+1)-1]}{2\cdot4\cdot6\cdots2(\nu+1)[2(\nu+1)+1]2^{2(\nu+1)+1}}}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\nu(2\nu+1)2^{2\nu+1}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2\nu+2)(2\nu+3)2^{2\nu+3}}}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\nu(2\nu+1)2^{2\nu+1}}} = \frac{\dfrac{2\nu+1}{(2\nu+2)(2\nu+3)2^{2\nu+1}\cdot2^2}}{\dfrac{1}{(2\nu+1)2^{2\nu+1}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\nu+1}{(2\nu+2)(2\nu+3)4}}{\dfrac{1}{2\nu+1}} = \frac{(2\nu+1)(2\nu+1)}{4(2\nu+2)(2\nu+3)} = \frac{4\nu^2+4\nu+1}{16\nu^2+40\nu+24}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{4\nu^2+4\nu+1}{16\nu^2+40\nu+24} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{4\nu^2\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{4\nu^2}\right)}{16\nu^2\left(1+\frac{40}{16\nu}+\frac{24}{16\nu^2}\right)} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{4\nu^2}}{4\left(1+\frac{40}{16\nu}+\frac{24}{16\nu^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+0+0}{4(1+0+0)} = \frac{1}{4} < 1$$

Παρατηρούμε ότι το όριο $\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{1}{4} < 1$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\nu(2\nu+1)2^{2\nu+1}}$ θα **συγκλίνει**.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 10

Να δείξετε ότι:

$$i)\ \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2+\nu}}=1, \qquad ii)\ \sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{5^\nu+3^\nu-7}{3^\nu 5^\nu}=\frac{1}{4}.$$

Λύση

(i) Έχουμε ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2+\nu}}=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu(\nu+1)}}=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{\nu}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{\nu}}-\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{\nu}}\right)=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right)=$$

$$=\sum\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right)\right]$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά, επομένως ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\alpha_\nu=\alpha_1-\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu,$$

άρα η τελευταία σχέση μας γίνεται:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2+\nu}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}=1-0=1$$

(ii) Έχουμε ότι:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{5^\nu+3^\nu-7}{3^\nu 5^\nu}=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{5^\nu}{3^\nu 5^\nu}+\frac{3^\nu}{3^\nu 5^\nu}-\frac{7}{3^\nu 5^\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^\nu}+\frac{1}{5^\nu}-\frac{7}{3^\nu 5^\nu}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{3^\nu}+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{5^\nu}-\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{7}{3^\nu 5^\nu}=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^\nu+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^\nu-7\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{15}\right)^\nu \xRightarrow{\sum_{\nu=1}^{+\infty}\alpha^\nu=\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{5^\nu+3^\nu-7}{3^\nu 5^\nu}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-7\frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{15}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}-7\frac{\frac{1}{15}}{\frac{14}{15}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-7\frac{1}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Γραπτή εργασία 3 (Φεβρουάριος 2013)

Άσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια συναρτήσεων:

(α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$ **(β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{3x^2+6x}$ **(γ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$

Λύση

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$$

Παρατηρούμε ότι το 4 αποτελεί ρίζα τόσο του αριθμητή, όσο και του παρονομαστή, επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα το όριο γιατί προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Θα εργαστούμε επομένως ως εξής:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x+4}=\frac{4-1}{4+4}=\frac{3}{8}$$

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x^2+6x}$$

Παρατηρούμε ότι όταν το x τείνει στο μηδέν, τόσο ο αριθμητής, όσο και ο παρονομαστής μηδενίζονται (απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$). Το παραπάνω όριο θα μπορούσε να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot(3x^2+6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x\cdot(3x+6)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos x\cdot(3x+6)}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x\cdot(3x+6)}\right)\xLeftrightarrow{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x^2+6x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x\cdot(3x+6)}\right)=\frac{1}{1(0+6)}=\frac{1}{6}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

(γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε α προσδιορίσουμε άμεσα το όριο γιατί προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα θα εργαστούμε ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-2(1-0)}{\sqrt{1-0+0}+1}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-\frac{2}{2}=-1$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & \alpha\nu\ x \leq 1 \\ ax^2 + b & \alpha\nu\ 1 < x < +\infty \end{cases}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

(α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των a, b έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Λύση

(α) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & \alpha\nu\ x \leq 1 \\ ax^2 + b & \alpha\nu\ 1 < x < +\infty \end{cases}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x_0 \neq 1$, η f είναι συνεχής αφού

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για να είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^3 = 1 \\ f(1) = 1^3 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = a \cdot 1^2 + b = a + b \end{cases} \xLeftrightarrow{\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)} a + b = 1 \ [1]$$

Η παράγωγος της f θα είναι $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \alpha\nu\ x \leq 1 \\ 2ax & \alpha\nu\ 1 < x < +\infty \end{cases}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει το όριο για το $x_0 = 1$, δηλαδή:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

Έχουμε λοιπόν:

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = 3\cdot 1^2 = 3 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = 2\cdot\alpha\cdot 1 = 2\alpha \end{cases} \xLeftrightarrow{\lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f'(x)} 2\alpha = 3 \ [2]$$

Από τις σχέσεις [1] και [2] προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} \alpha + b = 1 \\ 2\alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + b = 1 \\ \alpha = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} + b = 1 \\ \alpha = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

(β) Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Στο σημείο A, το $x_0 = 1$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τις ακόλουθες τιμές:

$$f(1) = 1^3 = 1$$

$$f'(1) = 2\cdot 1^2 = 2$$

Με τη βοήθεια των τελευταίων, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,1)$ γίνεται:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 3

(α) Χρησιμοποιείστε το κριτήριο παρεμβολής για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$$

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\sin\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$$

Γνωρίζουμε ότι το $\sin\frac{1}{x}$ κυμαίνεται μεταξύ των τιμών -1 και $+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, δηλαδή ισχύει:

$$-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1\Leftrightarrow -x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0}(-x)=\lim_{x\to 0}x=0$$

Επειδή $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

(β) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\sin\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$. Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θα πρέπει να ελέγξουμε αν η συνάρτηση είναι συνεχής και για $x=0$. Για να είναι συνεχής στο σημείο αυτό θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x\right) + \lim_{x\to 0}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \lim_{x\to 0}\left(x\cdot x\cdot \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) \overset{\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0\cdot 0 = 0$$

Εφόσον $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 4

Να προσδιορίσετε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x\,, x \in [0,2\pi]$$

Λύση

Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2\sin x + \cos 2x\,, x \in [0,2\pi]$. Για να υπολογίσουμε τα ακρότατά της θα υπολογίσουμε αρχικά την πρώτη παράγωγό της και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα x_0 για τα οποία ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμα σημεία).

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = (2\sin x + \cos 2x)' = 2\cos x - \sin 2x \cdot (2x)' \Leftrightarrow f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x \cdot$$

Η f' μηδενίζεται στα εξής σημεία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 2\sin 2x \Leftrightarrow \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ή} \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ή} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\dfrac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \acute{o}\pi o\upsilon\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Επειδή το $x \in [0,2\pi]$, θα έχουμε:

$$0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \le 2\pi \\ 0 \le 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \le 2\pi \\ 0 \le 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \le 2\pi \\ 0 \le 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le 2\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le 2\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{6} \le 2\kappa\pi \le 2\pi - \dfrac{\pi}{6} \\ -\dfrac{5\pi}{6} \le 2\kappa\pi \le 2\pi - \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le \dfrac{5\pi}{2} \\ \\ -\dfrac{\pi}{6} \le 2\kappa\pi \le \dfrac{11\pi}{6} \\ -\dfrac{5\pi}{6} \le 2\kappa\pi \le \dfrac{7\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \le \kappa \le \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{4} \le \kappa \le \dfrac{5}{4} \\ \\ -\dfrac{\pi}{12} \le \kappa \le \dfrac{11}{12} \\ -\dfrac{5}{12} \le \kappa \le \dfrac{7}{12} \end{cases} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \kappa = 0 \\ \kappa = 1 \\ \\ \kappa = 0 \\ \kappa = 0 \end{cases}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$x = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \\ \\ \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{cases}$$

Τα κρίσιμα σημεία αποτελούν θέσεις ακρότατων. Για να δούμε αν πρόκειται για μέγιστα ή για ελάχιστα θα υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της f. Έχουμε λοιπόν:

$$f''(x) = (2\cos x - 2\sin 2x)' = -2\sin x - 2\cos 2x \cdot (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$$

Θα υπολογίσουμε τι τιμές παίρνει η δεύτερη παράγωγος της f στα κρίσιμα σημεία. Αν η $f'' < 0$ θα έχουμε τοπικό μέγιστο (ΤΜ), ενώ αν $f'' > 0$ θα έχουμε τοπικό ελάχιστο (ΤΕ).

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos 2\frac{\pi}{2} = -2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\pi = -2\cdot 1 - 4\cdot(-1) = 2 > 0 \to T.E.$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos 2\frac{3\pi}{2} = -2\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos 3\pi =$$

$$= -2\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos(2\pi + \pi) = -2\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos\pi = -2\cdot(-1) - 4\cdot(-1) > 0 \to T.E.$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos 2\frac{\pi}{6} = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{3} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} < 0 \to T.M.$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{5\pi}{6} - 4\cos 2\frac{5\pi}{6} = -2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} < 0 \to T.M.$$

Θα υπολογίσουμε τις τιμές τις f τόσο στα κρίσιμα σημεία, όσο και στα άκρα του διαστήματος. Από τις τιμές αυτές η μεγαλύτερη είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

$$f(0) = 2\sin 0 + \cos 0 = 2\cdot 0 + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$f(2\pi) = 2\sin 2\pi + \cos 4\pi = 2\sin 0 + \cos 0 = 2\cdot 0 + 1 \Leftrightarrow f(2\pi) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2\cdot 1 - 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = 2\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi = 2\cdot(-1) - 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}5$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3} = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1{,}5$$

Άρα ολικό ελάχιστο έχουμε για $x = \frac{3\pi}{2}$, ενώ ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{5\pi}{6}$.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2e^x = 1$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Έχουμε την εξίσωση $x^2e^x = 1 \Leftrightarrow x^2e^x - 1 = 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2e^x - 1$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής για κάθε $x \in (0,1)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2e^x - 1) = 0^2e^0 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2e^x - 1) = 1^2e^1 - 1 = e - 1 > 0$$

Παραγωγίζοντας την f έχουμε:

$$f'(x) = (x^2e^x - 1)' = (x^2e^x)' - (1)' = x^2(e^x)' + (x^2)'e^x - 0 = x^2e^x + 2xe^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$$

Παρατηρούμε ότι η $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, εφόσον $e^x > 0$ και $x^2 + 2x > 0$ στο $(0,1)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(-1, e-1)$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 6

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$ ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα, την κυρτότητα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Λύση

Έχουμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$$

Για να ορίζεται η συνάρτηση f θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, επομένως έχουμε:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

Άρα, το **πεδίο ορισμού** της f είναι: $x \in \mathbb{R} - \{-2, +2\}$.

Θέλουμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση ως προς τη **μονοτονία** της. Θα υπολογίσουμε αρχικά την πρώτη παράγωγό της (σημειώνεται ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επομένως παραγωγίζεται):

$$f'(x) = \frac{(2x^3)'(x^2-4) - (2x^3)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{6x^2(x^2-4) - (2x^3)2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^2 - 4x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2-4)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Θα υπολογίσουμε σε ποια σημεία η συνάρτηση f' μηδενίζεται και πότε παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Για να δούμε τι πρόσημο παίρνει η f', θα εξετάσουμε στην πραγματικότητα μόνο τον αριθμητή, αφού ο παρονομαστής $(x^2-4)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, +2\}$. Ελέγχουμε τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση f' με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα (στα σημεία του πίνακα που υπάρχει διπλή μαύρη γραμμή σημαίνει ότι ο όρος μηδενίζεται, ενώ εκεί που υπάρχει διπλή κόκκινη γραμμή σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται):

x	$-2\sqrt{3}$	-2		0	2	$2\sqrt{3}$
$2x^2$	+	+	+ ‖	+	+	+
x^2-12	+ ‖	-	-	-	- ‖	+

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$(x^2-4)^2$	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	-	-	-	+

Στα σημεία όπου η f' είναι *θετική* η συνάρτηση f θα είναι ***γνησίως αύξουσα*** (βέλος που δείχνει προς τα πάνω), ενώ στα σημεία όπου η f' είναι *αρνητική* η συνάρτηση f θα είναι ***γνησίως φθίνουσα*** (βέλος που δείχνει προς τα κάτω). Στα σημεία x_0 που η f' *μηδενίζεται*, η συνάρτηση f θα παρουσιάζει **τοπικά ακρότατα** [τοπικά μέγιστα (ΤΜ) ή τοπικά ελάχιστα(ΤΕ)] αν το πρόσημο της f' μεταβάλλεται εκατέρωθεν του x_0. Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+		-		-		-		-		+
$f(x)$	↗	ΤΜ $f(-2\sqrt{3})$	↘		↘		↘		↘	ΤΕ $f(2\sqrt{3})$	↗

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3},+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $x \in (-2\sqrt{3},2\sqrt{3}) - \{\pm 2\}$. Τα τοπικά ακρότατα θα είναι:

$$f(-2\sqrt{3}) = \frac{2(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2-4} = \frac{-48\sqrt{3}}{12-4} = \frac{-48\sqrt{3}}{8} = -6\sqrt{3} \rightarrow \text{τοπικό μέγιστο}$$

$$f(2\sqrt{3}) = \frac{2(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2-4} = \frac{48\sqrt{3}}{12-4} = \frac{48\sqrt{3}}{8} = 6\sqrt{3} \rightarrow \text{τοπικό ελάχιστο}$$

Θέλουμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση ως προς την **κυρτότητά** της. Θα πρέπει να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της f. Έχουμε λοιπόν:

$$f''(x) = \left(\frac{2x^4-24x^2}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{(2x^4-24x^2)'(x^2-4)^2-(2x^4-24x^2)[(x^2-4)^2]'}{[(x^2-4)^2]^2} =$$

$$= \frac{(2x^4-24x^2)'(x^4-8x^2+16)-(2x^4-24x^2)(x^4-8x^2+16)'}{[(x^2-4)^2]^2}$$

$$= \frac{(8x^3-48x)(x^4-8x^2+16)-(2x^4-24x^2)(4x^3-16x)}{[(x^2-4)^2]^2} =$$

$$= \frac{8x^7-64x^5+128x^3-48x^5+384x^3-768x-8x^7+32x^5+96x^5-384x^3}{[(x^2-4)^2]^2} =$$

$$= \frac{16x^5+128x^3-768x}{[(x^2-4)^2]^2} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{16x(x^4+8x^2-48)}{[(x^2-4)^2]^2}$$

Θα υπολογίσουμε σε ποια σημεία η συνάρτηση f'' μηδενίζεται και πότε παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{16x(x^4+8x^2-48)}{[(x^2-4)^2]^2}=0 \Leftrightarrow 16x(x^4+8x^2-48)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ή \\ x^4+8x^2-48=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ή \\ (x^2+4)(x^2-12)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ή \\ x^2-12=0 \\ ή \\ x^2+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ ή \\ x=\pm 2\sqrt{3} \\ ή \\ απορρίπτεται \end{cases}$$

Για να δούμε τι πρόσημο παίρνει η f'', θα εξετάσουμε στην πραγματικότητα μόνο τον αριθμητή, αφού ο παρονομαστής $(x^2-4)^4>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{-2,+2\}$. Ελέγχουμε τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση f'' με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα (στα σημεία του πίνακα που υπάρχει διπλή μαύρη γραμμή σημαίνει ότι ο όρος μηδενίζεται, ενώ εκεί που υπάρχει διπλή κόκκινη γραμμή σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται):

x	$-2\sqrt{3}$	-2	0	2	$2\sqrt{3}$	
$16x$	-	-	-	+	+	+
x^4+8x^2-48	+	-	-	-	-	+
$(x^2-4)^4$	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	+	+	-	-	+

Στα σημεία όπου η f'' είναι *θετική* η συνάρτηση f θα είναι ***κυρτή***, ενώ στα σημεία όπου η f'' είναι *αρνητική* η συνάρτηση f θα είναι ***κοίλη***. Στα σημεία x_0 που η f'' *μηδενίζεται*, η συνάρτηση f θα παρουσιάζει **σημεία καμπής** (ΣΚ), αν το πρόσημο της f' μεταβάλλεται εκατέρωθεν του x_0. Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

x	$-2\sqrt{3}$	-2	0	2	$2\sqrt{3}$	
$f''(x)$	-	+	+	-	-	+
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κοίλη	κοίλη	κυρτή
	ΣΚ $f(-2\sqrt{3})$		ΣΚ $f(0)$		ΣΚ $f(2\sqrt{3})$	

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η f είναι κοίλη για $x \in (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (0,2\sqrt{3})-\{2\}$ και κυρτή στο διάστημα $x \in (-2\sqrt{3},0) \cup (2\sqrt{3},+\infty)-\{-2\}$. Τα σημεία καμπής θα είναι:

$$f(-2\sqrt{3})=\frac{2(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2-4}=\frac{-48\sqrt{3}}{12-4}=\frac{-48\sqrt{3}}{8}=-6\sqrt{3} \rightarrow \text{σημείο καμπής}$$

$$f(0)=\frac{2(0)^3}{(0)^2-4}=0 \rightarrow \text{σημείο καμπής}$$

ιδιαιτερα-μαθηματα.gr

$$f(2\sqrt{3}) = \frac{2(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2 - 4} = \frac{48\sqrt{3}}{12-4} = \frac{48\sqrt{3}}{8} = 6\sqrt{3} \to \text{σημείο καμπής}$$

Θα εξετάσουμε τέλος αν η συνάρτηση f έχει **ασύμπτωτες**. Θα ελέγξουμε αρχικά στα σημεία όπου η f είναι ασυνεχής, δηλαδή στα σημεία -2 και 2:

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{2x^3}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{2x^3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{2x^3}{x^2-4} = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} \frac{2x^3}{x^2-4} = +\infty$$

το οποίο σημαίνει ότι οι ευθείες $x = -2$ και $x = 2$ αποτελούν **κατακόρυφες ασύμπτωτες** της f.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Οι ασύμπτωτες αυτές θα είναι ευθείες της μορφής $y = \lambda x + \beta$, με $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Θα υπολογίσουμε τα εξής όρια:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{4}{x^2}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x^3+8x}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=0$$

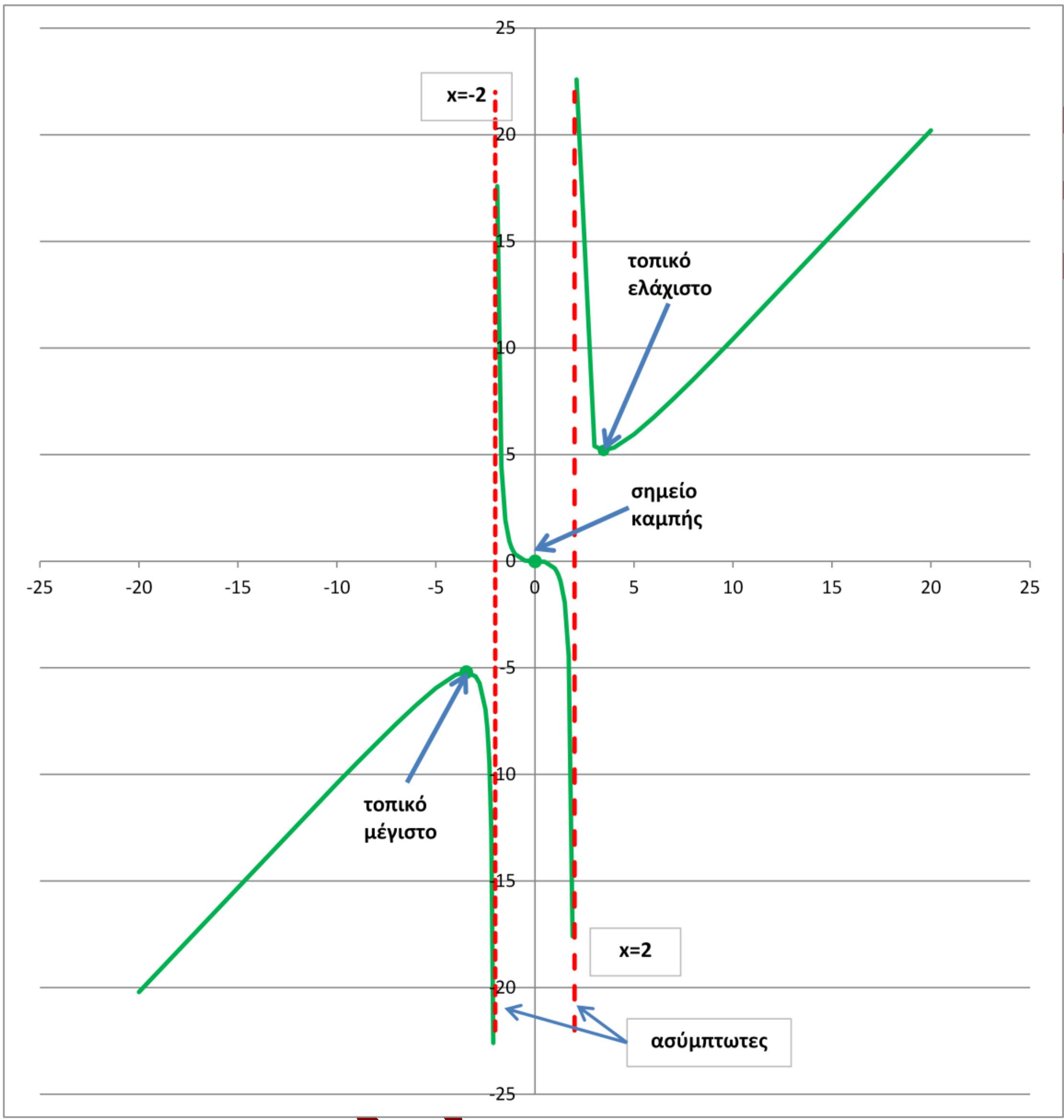
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{4}{x^2}}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^3+8x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=0$$

Επομένως, η ευθεία $y=2x$ αποτελεί πλάγια ασύμπτωτη της f.

Με τη βοήθεια όλων των παραπάνω κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, η οποία φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ιδιαιτεραμαθηματα.gr



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση συνάρτησης f

ιδιαιτερα...gr

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int (x+2)\cos 2x \, dx$

(β) $\int \frac{x^2+4x+1}{x(x-2)^2} dx$

(γ) $\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

Λύση

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int (x+2)\cos 2x \, dx = \int (x+2)\cos 2x \, (2x)' \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int (x+2)(\sin 2x)' \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)\sin 2x - \frac{1}{2}\int (x+2)' \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)\sin 2x - \frac{1}{2}\int 1 \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}(x+2)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\sin 2x \, (2x)' \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)\sin 2x - \frac{1}{4}\int (-\cos 2x)' \, dx = \frac{1}{2}(x+2)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

(β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+4x+1}{x(x-2)^2} dx$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, ενώ ο παρονομαστής 3^{ου} βαθμού, και ότι στον παρονομαστή έχουμε γινόμενο πραγματικών απλών ριζών, οπότε η παράσταση μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{x^2+4x+1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{(x-2)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε αρχικά τους συντελεστές A, B και Γ για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε στη συνέχεια το ολοκλήρωμα. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{x^2+4x+1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{(x-2)^2} \Leftrightarrow x^2+4x+1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + \Gamma x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+1 = A(x^2-2x+4) + B(x^2-2x) + \Gamma x \Leftrightarrow$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$\Leftrightarrow x^2+4x+1=Ax^2-2Ax+4A+Bx^2-2Bx+\Gamma x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+1=(A+B)x^2+(-2A-2B+\Gamma)x+4A \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-2B+\Gamma=4 \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-2B+\Gamma=4 \\ A=\frac{1}{4} \end{cases} \overset{A=\frac{1}{4}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} B=\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}-2B+\Gamma=4 \\ A=\frac{1}{4} \end{cases} \overset{B=\frac{3}{4}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} B=\frac{3}{4} \\ \Gamma=6 \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Επομένως θα είναι

$$\frac{x^2+4x+1}{x(x-2)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{3}{4}}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\int \frac{x^2+4x+1}{x(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{3}{4}}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}\right)dx=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{4}}{x}dx+\int\frac{\frac{3}{4}}{x-2}dx+\int\frac{6}{(x-2)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x-2}dx+6\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(\ln|x|)'\,dx+\frac{3}{4}\int\frac{(x-2)'}{x-2}dx+6\int\frac{(x-2)'}{(x-2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{3}{4}\int\frac{(x-2)'}{x-2}dx+6\int\frac{(x-2)'}{(x-2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{3}{4}\int(\ln|x-2|)'\,dx+6\int(x-2)'(x-2)^{-2}\,dx=$$

$$=\ln|x|^{\frac{1}{4}}+\ln|x-2|^{\frac{3}{4}}-2\int(-3)(x-2)^{-2}(x-2)'\,dx=$$

$$=\ln\sqrt[4]{|x|}+\ln\sqrt[4]{|x-2|^3}-2\int[(x-2)^{-3}]'\,dx=\ln\sqrt[4]{|x|\cdot|x-2|^3}-2(x-2)^{-3}+c=$$

$$=\ln\sqrt[4]{|x|\cdot|x-2|^3}-\frac{2}{(x-2)^3}+c$$

(γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\int\frac{1}{2}(x^2)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|-\int\frac{1}{2}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'dx=$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)' dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\frac{x+1}{x}}(1+x^{-1})'\,dx$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}\int \frac{x^3}{x+1}\cdot(-1)(x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int \frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\int (x)'\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)'}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \ln|x+1|'\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\frac{\left|1+\frac{1}{x}\right|}{|x+1|} + \frac{1}{2}x + c = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|\frac{\frac{x+1}{x}}{x+1}\right| + \frac{1}{2}x + c = \frac{1}{2}x^2 \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}x + c$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 8

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα όρια που θέλουμε να υπολογίσουμε είτε άμεσα είτε μέσα από μετασχηματισμούς καταλήγουν σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επομένως, για την επίλυσή τους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L'Hospital, σύμφωνα με τον οποίο ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(α) Έχουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)\ln x}-\frac{\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{\substack{\frac{0}{0}\\ \text{κανόνας}\\ \text{Hospital}}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{[(x-1)\ln x]'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{(1-0)\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-0}{(x)'\ln x+x(\ln x)'+1-0}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1\cdot\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

(β) Έχουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)} \underset{\substack{\kappa\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\varsigma\\ Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-e^{-2ax})'}{[\ln(1+x)]'} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax})'-(e^{-2ax})'}{[\ln(1+x)]'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}(ax)'-e^{-2ax}(-2ax)'}{\frac{1}{1+x}(1+x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}a-e^{-2ax}(-2a)}{\frac{1}{1+x}(0+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}+2a\cdot e^{-2ax}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}[(1+x)(a\cdot e^{ax}+2a\cdot e^{-2ax})] =$$

$$= (1+0)(a\cdot e^{0}+2a\cdot e^{0}) = a\cdot 1+2a\cdot 1 = 3a$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$. Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x)$ σε μια περιοχή του σημείου $x_0 = 0$ με ένα πολυώνυμο Taylor $3^{ου}$ βαθμού. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή, να υπολογίσετε την τιμή $f(1) = \frac{\sin 1}{e}$.

Λύση

Έχουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση f στο σημείο $x_0 = 0$ με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου Taylor $3^{ου}$ βαθμού. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = \sin x$ και $q(x) = e^x$, οπότε η συνάρτηση f θα ισούται με

$$f(x) = \frac{g(x)}{q(x)} \quad [1]$$

Θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor (κέντρο 0) ξεχωριστά για τον αριθμητή και για τον παρονομαστή. Εφόσον θέλουμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση με ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού, θα πρέπει να υπολογίσουμε μέχρι και την τρίτη παράγωγο της g και της q. οπότε έχουμε:

Συνάρτηση αριθμητή		$\boldsymbol{x_0 = 0}$
$\boldsymbol{g}$	$g(x) = \sin x$	$g(0) = \sin 0 = 0$
$\boldsymbol{g'}$	$g'(x) = (\sin x)' = \cos x$	$g'(0) = \cos 0 = 1$
$\boldsymbol{g''}$	$g''(x) = (\cos x)' = -\sin x$	$g''(0) = -\sin 0 = 0$
$\boldsymbol{g'''}$	$g'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$	$g'''(0) = -\cos 0 = -1$

Συνάρτηση παρονομαστή		$\boldsymbol{x_0 = 0}$
$\boldsymbol{q}$	$q(x) = e^x$	$q(0) = e^0 = 1$
$\boldsymbol{q'}$	$q'(x) = (e^x)' = e^x$	$q'(0) = e^0 = 1$
$\boldsymbol{q''}$	$q''(x) = (e^x)' = e^x$	$q''(0) = e^0 = 1$
$\boldsymbol{q'''}$	$q'''(x) = (e^x)' = e^x$	$q'''(0) = e^0 = 1$

Επομένως, το ανάπτυγμα Taylor για τον αριθμητή θα είναι:

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

$$g(x) = g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{g''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{g'''(0)}{3!}(x-0)^3 =$$

$$= 0 + 1\cdot x + \frac{0}{4}\cdot x^2 - \frac{1}{27}x^3 \Leftrightarrow g(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad [2]$$

και για τον παρονομαστή:

$$q(x) = q(0) + q'(0)(x-0) + \frac{q''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{q'''(0)}{3!}(x-0)^3 =$$

$$= 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \Leftrightarrow q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad [3]$$

Από τις [1], [2] και [3] έχουμε ότι η συνάρτηση f προσεγγίζετε στην περιοχή $x_0 = 0$ με το εξής πολυώνυμο 3ου βαθμού:

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \xRightarrow{[1][2][3]} f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης θα υπολογίσουμε την τιμή $f(1)$.

$$f(1) = \frac{\sin 1}{e} = \frac{1 - \frac{1^3}{6}}{1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!}} = \frac{1 - \frac{1}{6}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{16}{6}} = \frac{5}{16}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

Άσκηση 10

Να προσδιορίσετε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^n$$

Λύση

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^n$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ρίζας:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n \cdot 2^n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|n|}} \cdot \left|\frac{1}{2}\right| \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right| = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right|$$

Γνωρίζουμε ότι για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει το όριο να είναι μικρότερο της μονάδας, επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-\frac{3}{2} < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω υπολογίζουμε ότι η **ακτίνα σύγκλισης** της δειναμοσειράς είναι $\frac{3}{2}$ και το διάστημα σύγκλισης $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, στο οποίο πρέπει να επισυνάψουμε ένα ή κανένα ή και τα δύο άκρα του.

Για $x = -\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}(-2)^n = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \to \text{αποκλίνει}$$

Για $x = \frac{7}{2}$ έχουμε:

$$\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} 2^n = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \to \text{αποκλίνει}$$

Άρα το **διάστημα σύγκλισης** είναι $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

idiaiteramathimata.gr